解答例

2025年度　東北公益文科大学一般選抜（B日程）　数学

第1問

(1) $\mathrm{AB}=x,\ \mathrm{OA}=\mathrm{OB}=1$ より $\triangle\ \mathrm{OAB}$ の面積は

$$S_1=\frac{x\sqrt{(2+x)(2-x)}}{4}$$

(2) 内接円の半径を r とすると

$$r=\frac{2S_1}{2+x}=\frac{x}{2}\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$$

よって内接円の面積は

$$S_2=\pi r^2=\pi\frac{x^2(2-x)}{4(2+x)}$$

(3) S_1 の二乗

$$S_1^2=\frac{x^2(4-x^2)}{16}=\frac{-(x^2-2)^2+4}{16}$$

より S_1 は $x=\sqrt{2}$ のとき最大値 $1/2$ になる。

(4) $x=\sqrt{2}$ のとき $S_2=\pi\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)=\pi\times 0.086$。$x=1.2$ のとき $S_2=\pi\times 0.09$。よって $x=1.2$ の方が大きい。

第2問

(1) $\cos x=0$ は解でないため両辺を $\cos x$ で割ると $\tan x=1$ となる。$\tan x=1$ を満たすのは $x=45°, 225°$ である。

(2) 右辺に倍角の公式を使うと $\cos x=2\sin x\cos x$ となり，変形して $\cos x(1-2\sin x)=0$ となる。この解 $\cos x=0,\ \sin x=1/2$ を満たすのは $x=90°, 270°, 30°, 150°$ である。

(3) 右辺に加法定理を使うと $\cos x=\sin x\cos 2x+\cos x\sin 2x$ さらに右辺に倍角の公式を使うと

$$\begin{aligned}\cos x &= \sin x(4\cos^2 x-1)\\ &= \sin x\left(\frac{4}{1+\tan^2 x}-1\right)\\ &= \sin x\frac{3-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}\end{aligned}$$

$\cos x=0$ は解ではないため、両辺に $\frac{1+\tan^2 x}{\cos x}$ をかけると $1+\tan^2 x=\tan x(3-\tan^2 x)$ となり，変形して $(\tan x-1)(\tan^2 x+2\tan x-1)=0$ となる。この解 $\tan x=1, -1\pm\sqrt{2}$ のうち後者は $\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=1$ を満たすときで、これは $\tan 2x=1$ に等しい。$\tan x=1$ を満たすのは $x=45°, 225°$, $\tan 2x=1$ を満たすのは $x=\frac{45}{2}°, \frac{225}{2}°, \frac{405}{2}°, \frac{585}{2}°$ である。

第3問

(1) 最大の数は 2 進数で 11111111 であり、10 進数に直すと $128+64+32+16+8+4+2+1=\underline{255}$ である。

最小の数は $\underline{0}$ である。

(2) 左からオクテットごとに 10 進数に直す。

$$\begin{aligned}10101100 &= 128+0+32+0+8+4+0+0 &&=172\\ 00010001 &= 0+0+0+16+0+0+0+1 &&=17\\ 00110110 &= 0+0+32+16+0+4+2+0 &&=54\\ 01101110 &= 0+64+32+0+8+4+2+0 &&=110\end{aligned}$$

以上より、<u>172.17.54.110</u>

(3) 最下位の 8 ビットのみがホスト部となるから

最小 $=0$, 最大 $=255$

(4) サブネットマスクを 2 進数表記すると 11111111 11111111 11111111 11100000 であるから 4 番目のオクテットの上位 3 ビットまでがネットワーク部となる。元の IP アドレスの第 4 オクテット 161 の 2 進数は 10100001 なので、これの下位 5 ビットをすべて 0 にした 10100000 が最小、下位 5 ビットをすべて 1 にした 10111111 が最大となる。それぞれ 10 進数では 160, 191 であるから、元のネット IP アドレスのワーク部と合わせて答は:

最小: 202.235.158.160

最大: 202.235.158.191

である。

第4問

(1) $a_5 = 175$

(2)

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= a_{n+2} - 3a_{n+1} \\ &= 7a_{n+1} - 12a_n - 3a_{n+1} \\ &= 4a_{n+1} - 12a_n \\ &= 4(a_{n+1} - 3a_n) = 4b_n \end{aligned}$$

以上より、$\underline{b_{n+1} = 4b_n}$

(3) 与式を変形し

$$a_{n-1}(7 - \alpha - \beta) + a_{n-2}(-12 + \alpha\beta) = 0$$

これがつねに成り立つ $\alpha,\ \beta$ は $\alpha + \beta = 7,\ \alpha\beta = 12$ で、解と係数の関係よりこれらは $x^2 - 7x + 12 = 0$ の解である。よって、$\underline{\alpha = 3,\ \beta = 4}$

(4) (3) の結果より $c_n = a_{n+1} - 4a_n$ とおくと $c_n = 3c_{n-1}$ である。

$$b_n = 4b_{n-1} = \cdots = 4^{n-1}b_1 = 4^{n-1} = a_{n+1} - 3a_n$$
$$c_n = 3c_{n-1} = \cdots = 3^{n-1}c_1 = 3^{n-1} = a_{n+1} - 4a_n$$

これより $\underline{a_n = 4^{n-1} - 3^{n-1}}$